UNIVERSIDADE FEDERAL DE LAVRAS – UFLA
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS – DEX
GEX112 – ESTATÍSTICA BÁSICA
LISTA 8

1- Suponha que X (V.A. discreta) represente o número de animais doentes de uma determinada raça. Sabe-se que esta doença é controlada geneticamente e que ataca 1/4 da raça. Numa amostra de n = 50 animais, utilizando a distribuição binomial (exata) e a aproximação normal, determinar:

a) A probabilidade de haver na amostra menos de 10 animais doentes?
b) A probabilidade de haver no máximo 6 animais doentes?

2- Numa lâmina verificou-se que existiam em média 8 bactérias/cm^2. A lâmina foi subdividida em 300 quadrados de 1 cm^2 Em quantos destes quadrados você espera encontrar no máximo 3 bactéria? Qual é a probabilidade de se encontrar mais de 6 bactérias por centímetro quadrado?

Obs. Use a aproximação normal e compare com os valores exatos - Poisson.

Resolução

1) A variável X referente ao número de animais doentes possui distribuição binomial com probabilidade de sucesso $p = 1/4$ e $n = 50$. Assim, $X \sim \text{Binomial}(p = 1/4; n = 50)$. Logo, as probabilidades almejadas são:

a) Se utilizarmos a distribuição binomial exata a probabilidade almejada é:

$$
\begin{aligned}
P(X < 10) =& P(X = 9) + P(X = 8) + \cdots + P(X = 0) \\
=& \binom{50}{9}\left(\frac{1}{4}\right)^{9}\left(\frac{3}{4}\right)^{50-9} + \binom{50}{8}\left(\frac{1}{4}\right)^{8}\left(\frac{3}{4}\right)^{50-8} + \cdots + \binom{50}{0}\left(\frac{1}{4}\right)^{0}\left(\frac{3}{4}\right)^{50-0} \\
=& 0.072086641 + 0.046341412 + 0.025864974 + 0.012344646 + 0.004937858 + \\
& + 0.001610171 + 0,000411107 + 0,000077082 + 0.000009438 + 0,000000566 \\
=& 0.1637
\end{aligned}
$$

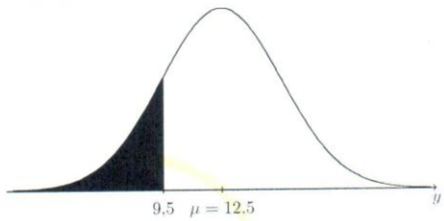
Considerando agora a aproximação normal e denominando a variável número de animais doentes na escala contínua por Y, temos

$$P(X < 10) \cong P(Y < 9.5).$$

devido a correção de continuidade, pois devemos somar as áreas dos retângulos correspondentes aos valores 9, 8, $\cdots$, 0, cujo limite da região é o 9,5, limite superior do retângulo do valor 9. Para determinarmos esta probabilidade devemos estimar a média e variância da binomial que são:

$$\mu_Y = np = 50 \times \frac{1}{4} = 12{,}5 \qquad \text{e} \qquad \sigma_Y^2 = np(1-p) = 50 \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = 9.375.$$

O gráfico da probabilidade almejada na escala não padronizada é:



Portanto,

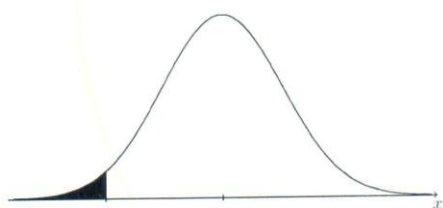
$$\begin{aligned} P(X < 10) \cong& P(Y < 9{,}5) = P\left(Z < \frac{9{,}5 - 12{,}5}{\sqrt{9{,}375}}\right) = P(Z < -0{,}98) \\ \cong& 0{,}5 - P(-0{,}98 < Z < 0) = 0{,}5 - P(0 < Z < 0{,}98) = 0.5 - 0.3365 = 16.35\%. \end{aligned}$$

Comparando a probabilidade exata 16.37% com o resultado da aproximação normal 16.35%, verificamos que tivemos um excelente resultado aproximado. Isso é esperado, pois $np = 12{,}5 > 5$.

b) Utilizando inicialmente o cálculo exato pela binomial, temos

$$\begin{aligned} P(X \leq 6) =& P(X = 6) + P(X = 5) + \cdots + P(X = 0) \\ =& \binom{50}{6}\left(\frac{1}{4}\right)^6\left(\frac{3}{4}\right)^{50-6} + \binom{50}{5}\left(\frac{1}{4}\right)^5\left(\frac{3}{4}\right)^{50-5} + \cdots + \binom{50}{0}\left(\frac{1}{4}\right)^0\left(\frac{3}{4}\right)^{50-0} \\ =& 0.012344646 + 0{,}004937858 + 0{,}001610171 + 0.000411107 + 0.000077082 + \\ &+ 0{,}000009438 + 0{,}000000566 \\ =& 0.01939 = 1{,}939\% \end{aligned}$$

Pela aproximação normal, temos que $P(X \leq 6) \cong P(Y < 6{,}5)$, como pode ser visto na figura ilustrativa a seguir.



Portanto,

$$\begin{aligned} P(X \leq 6) \cong& P(Y < 6.5) = P\left(Z < \frac{6{,}5 - 12{,}5}{\sqrt{9{,}375}}\right) = P(Z < -1{,}96) \\ \cong& 0{,}5 - P(-1.96 < Z < 0) = 0.5 - P(0 < Z < 1{,}96) = 0.5 - 0.4750 = 2.50\%. \end{aligned}$$

Comparando a probabilidade exata 1,94% com o resultado da aproximação normal 2.50%, verificamos que tivemos uma concordância apenas razoável. Embora a aproximação seja boa teoricamente, pois $np = 12.5 > 5$.

quando calculamos probabilidades relacionadas aos valores extremos da distribuição, há sempre uma perda da precisão da aproximação normal.

2) A variável X referente ao número de bactérias por cm^2 possui distribuição Poisson com parâmetro $\lambda = 8$ (média). Assim, $X \sim \text{Poisson}(\lambda = 8)$. Logo, as respostas as questões formuladas são dadas por:

a) Se utilizarmos a Poisson exata a probabilidade necessária para respondermos a primeira questão é:

$$
\begin{aligned}
P(X \leq 3) =& P(X=3) + P(X=2) + P(X=1) + P(X=0) \\
=& \frac{e^{-8}8^3}{3!} + \frac{e^{-8}8^2}{2!} + \frac{e^{-8}8^1}{1!} + \frac{e^{-8}8^0}{0!} \\
=& 0{,}0286 + 0{,}0107 + 0{,}0027 + 0{,}0003 \\
=& 0{,}0423 = 4{,}23\%
\end{aligned}
$$

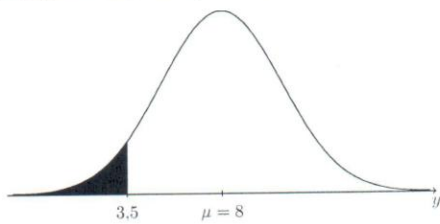
O número esperado de quadrados com no máximo 3 bactérias é $0{,}0423 \times 300 \cong 13$.
Considerando agora a aproximação normal e denominando a variável número de bactérias na escala contínua por Y, temos

$$P(X \leq 3) \cong P(Y < 3{,}5),$$

devido a correção de continuidade, pois devemos somar as áreas dos retângulos correspondentes aos valores 3, 2, 1, 0, cujo limite da região é o 3,5, limite superior do retângulo do valor 3. Para determinarmos esta probabilidade devemos estimar a média e variância da Poisson que são iguais e no caso valem $\lambda = 8$. Logo

$$\mu_Y = 8 \qquad \text{e} \qquad \sigma_Y^2 = 8.$$

O gráfico da probabilidade almejada na escala não padronizada é:



Portanto,

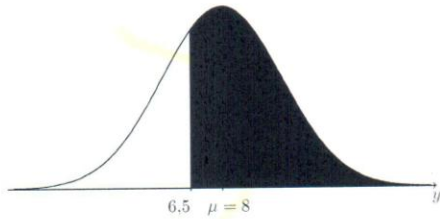
$$
\begin{aligned}
P(X \leq 3) \cong& P(Y < 3{,}5) = P\left(Z < \frac{3{,}5 - 8}{\sqrt{8}}\right) = P(Z < -1{,}59) \\
\cong& 0{,}5 - P(-1{,}59 < Z < 0) = 0{,}5 - P(0 < Z < 1{,}59) = 0{,}5 - 0{,}4441 = 5{,}59\%.
\end{aligned}
$$

Comparando a probabilidade exata 4,23% com o resultado da aproximação normal 5,59%, verificamos que tivemos uma boa concordância. Isso é esperado, pois $\lambda = 8 > 7$, que é o limite recomendado em alguns livros textos.
O número esperado de quadrados com no máximo 3 bactérias é $0{,}0559 \times 300 \cong 17$.

b) Utilizando inicialmente o cálculo exato pela Poisson, temos

$$
\begin{aligned}
P(X > 6) =& 1 - P(X \leq 6) = 1 - [P(X=6) + P(X=5) + \cdots + P(X=0)] \\
=& 1 - \left[\frac{e^{-8}8^6}{6!} + \frac{e^{-8}8^5}{5!} + \cdots + \frac{e^{-8}8^1}{1!} + \frac{e^{-8}8^0}{0!}\right] \\
=& 1 - (0{,}1221382 + 0{,}0916037 + 0{,}0916037 + 0{,}0572523 + 0{,}0286261 + 0{,}0107348 \\
& + 0{,}0026837 + 0{,}0003355) \\
=& 1 - 0{,}3133743 = 68{,}66\%
\end{aligned}
$$

Pela aproximação normal, temos que $P(X > 6) \cong P(Y > 6{,}5)$, como pode ser visto na figura ilustrativa a seguir:



Portanto,

$$\begin{aligned} P(X > 6) &\cong P(Y > 6{,}5) = P\left(Z > \frac{6{,}5 - 8}{\sqrt{8}}\right) = P(Z > -0{,}53) \\ &\cong 0{,}5 + P(-0{,}53 < Z < 0) = 0{,}5 + P(0 < Z < 0{,}53) = 0{,}5 + 0{,}2019 = 70{,}19\%. \end{aligned}$$

Comparando a probabilidade exata 68,66% com o resultado da aproximação normal 70,19%, verificamos que tivemos um bom resultado da aproximação.