Universidade Federal de Lavras

Departamento de Ciências Exatas

Prof. Daniel Furtado Ferreira

8ª Lista de Exercícios — Distribuição de Amostragem

1) O tempo de vida de uma lâmpada possui distribuição normal com média $\mu = 8000$ horas e variância $\sigma^2 = 40000$. Pergunta-se:

   a) Qual a probabilidade de se encontrar uma lâmpada com mais de 8100 horas?
   b) Qual a probabilidade de se encontrar uma lâmpada com menos de 7800 horas?
   c) Se fosse realizada uma amostra dessa população de tamanho $n = 25$ lâmpadas, qual seria a probabilidade da média da amostra ter mais de 8100 horas? Qual é a probabilidade dessa amostra ter média inferior a 7800 horas de duração?
   d) Qual é o teorema que garantiu o cálculo das probabilidades do item anterior?

2) Um elevador tem suporte máximo de 700 kg para uma lotação de $n = 10$ pessoas. Sabendo que o peso médio de humanos é de $\mu = 62$ kg e cujo desvio padrão é igual a $\sigma = 10$ kg, responder as seguintes questões, assumindo que o peso possui distribuição normal:

   a) Qual é a probabilidade de uma pessoa pesar mais de 70 kg?
   b) Qual é a probabilidade de o elevador ter sua carga máxima ultrapassada para um grupo aleatório de $n = 10$ pessoas que o utilizam?
   c) Com base na resposta dada no item (b), você julga que a carga de suporte máximo está bem especificada para este elevador? Justifique.

3) Consulte a tabela simplificada da distribuição qui-quadrado χ^2 apresentada a seguir e faça o esboço para os seguintes eventos, de acordo com notação utilizada em aula.

ν	0,05	0,025	0,01
6	12,592	14,449	16,812
8	15,507	17,535	20,090
10	18,307	20,483	23,209

   a) $\chi^2_{0,025}$ para $n = 11$;
   b) $\chi^2_{0,01}$ para $\nu = 6$;
   c) $\chi^2_{0,05}$ para $\nu = 10$;
   d) χ^2_{α} para $\nu = 8$, tal que $P(\chi^2 < \chi^2_\alpha) = 0{,}95$;
   e) Sabendo que $\int_0^k f\left(\chi^2\right) d\chi^2 = 0{,}95$, para $\nu = 8$, determinar o valor de k.

4) A seguir apresentamos um resumo da tabela da distribuição t de Student. Consulte-a e faça o esboço de cada gráfico com os valores encontrados de acordo com as questões apresentadas.

ν	0,05	0,025
9	1,833	2,262
10	1,812	2,228
19	1,729	2,093

   a) $P(t > t_c) = 0{,}05$ ou $t_{0,05}$ para $\nu = 10$ graus de liberdade; b) $t_{0,95}$ para $n = 20$; c) $t_{0,025}$ para $n = 10$; d) $t_{\alpha/2}$ tal que $P(-t_{\alpha/2} < t < t_{\alpha/2}) = 0{,}95$ para $\nu = 10$ graus de liberdade; e) Para uma amostra de tamanho $n = 10$, sabe-se que $\int_{t_c}^{\infty} f(t)dt = 0{,}025$. Quanto vale t_c?

5) Faça o gráfico ilustrando os seguintes eventos probabilísticos, para a distribuição F. A tabela seguinte é um resumo da tabela original, considerando o valor da probabilidade $\alpha = 5\%$ para o evento $P(F > F_c) = \alpha$.

	ν_1		
ν_2	1	5	9
5	6,61	5,05	4,77
10	4,96	3,33	3,02

a) $F_{0,05}$ com $\nu_1 = 5$ e $n_2 = 6$; b) $F_{0,05}$ com $n_1 = 10$ e $n_2 = 6$; c) $F_{0,05}$ com $\nu_1 = 1$ e $\nu_2 = 10$. Compare este valor com o de $t_{0,025}$ com $\nu = 10$, procurando verificar se a relação $t^2_{\alpha/2;\nu} = F_{\alpha;\nu_1=1,\nu_2=\nu}$ é verdadeira. Qual é a sua conclusão?

Resolução

1) As probabilidades almejadas são dadas por:

   a) $P(X > 8100) = P\left(Z > (8100 - 8000)/\sqrt{40000}\right) = P(Z > 0{,}50) = 0{,}50 - 0{,}1915 = 30{,}85\%$;

   b) $P(X < 7800) = P\left(Z < (7800 - 8000)/\sqrt{40000}\right) = P(Z < -1{,}00) = 0{,}50 - 0{,}3413 = 15{,}87\%$;

   c) Neste caso, $\bar{X} \sim N\left(\mu_{\bar{X}} = 8000; \sigma_{\bar{X}} = \dfrac{\sigma^2}{n} = \dfrac{40000}{25}\right)$

   Logo,

$$P(\bar{X} > 8100) = P\left(Z > \frac{8100 - 8000}{\sqrt{\dfrac{40000}{25}}}\right) = P(Z > 2{,}50) = 0{,}50 - 0{,}4938 = 0{,}62\%;$$

   Da mesma forma,

$$P(\bar{X} < 7800) = P\left(Z < \frac{7800 - 8000}{\sqrt{\dfrac{40000}{25}}}\right) = P(Z < -5{,}00) \approx 0{,}50 - 0{,}50 = 0\%.$$

   d) É o teorema do limite central, que diz que a distribuição das médias de uma população qualquer tem distribuição aproximadamente normal com média igual a média da população e variância igual a σ^2/n; se a distribuição da população é normal, a distribuição das médias é também normal (exata).

2) Sendo $X \sim N(\mu = 62; \sigma^2 = 100)$, então as probabilidades almejadas são dadas por:

   a) $P(X > 70) = P\left(Z > (70 - 62)/\sqrt{100}\right) = P(Z > 0{,}80) = 0{,}50 - 0{,}2881 = 21{,}19\%$;

   b) Neste caso, $\bar{X} \sim N\left(\mu_{\bar{X}} = 62; \sigma_{\bar{X}} = \dfrac{\sigma^2}{n} = \dfrac{100}{10} = 10\right)$

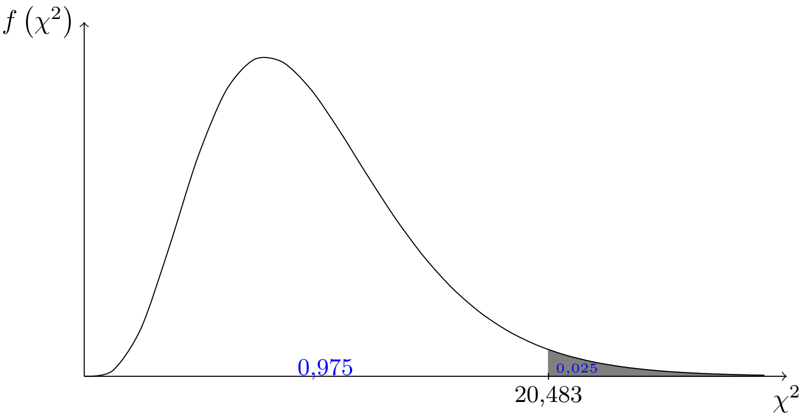
   Como a probabilidade de ultrapassar a carga de suporte é o total da amostra ultrapassar 700 kg, que corresponde a média ser superior a 70 kg. Assim,

$$P(\bar{X} > 70) = P\left(Z > \frac{70 - 62}{\sqrt{10}}\right) = P(Z > 2{,}53) = 0{,}50 - 0{,}4943 = 0{,}57\%;$$

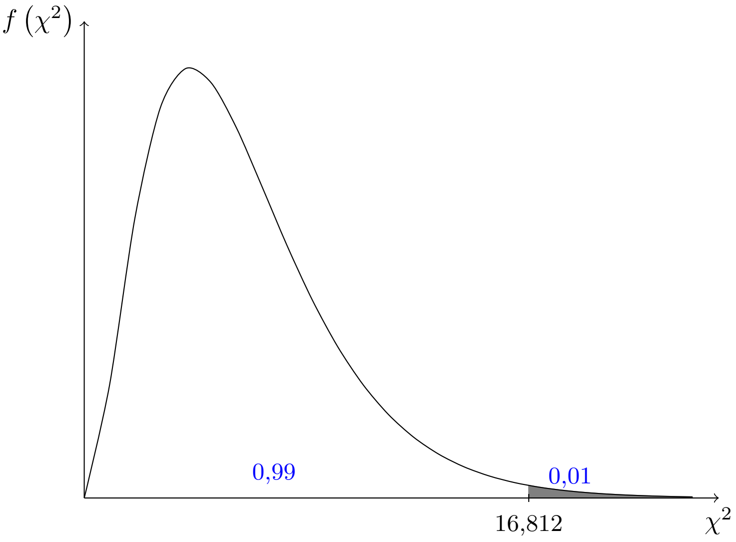
   c) Como 0,57% é uma probabilidade pequena, mas não suficiente pequena para estes propósitos, então acho que a carga máxima do elevador esta mal especificada (opinião pessoal. Outra pessoa pode achar que é bom o suficiente este valor). Poderia ser tomadas medidas simples, como redução do número limitante de pessoas no elevador, ou seja, passando de 10 para 9 ou 8, por exemplo. Claro que todo elevador tem uma margem de segurança muito maior que este limite. Portanto, se a carga de suporte for ultrapassada, os cabos não irão se romper. O que pode acontecer é que se isso for frequente, então pode causar fadiga no equipamento e com o passar dos anos, isso venha acontecer. Claro que manutenções permanentes irão corrigir fadigas no equipamento também. Mas o problema de fadiga seria evitado se a probabilidade de que a carga máxima seja ultrapassa seja apenas infinitésimos. Para alguns, essa probabilidade já seria pequena o suficiente para considerar que o elevador esteja bem dimensionado.

3) De acordo com a tabela fornecida e com as afirmativas probabilísticas temos as seguintes respostas aos exercícios propostos, considerando a distribuição qui-quadrado.

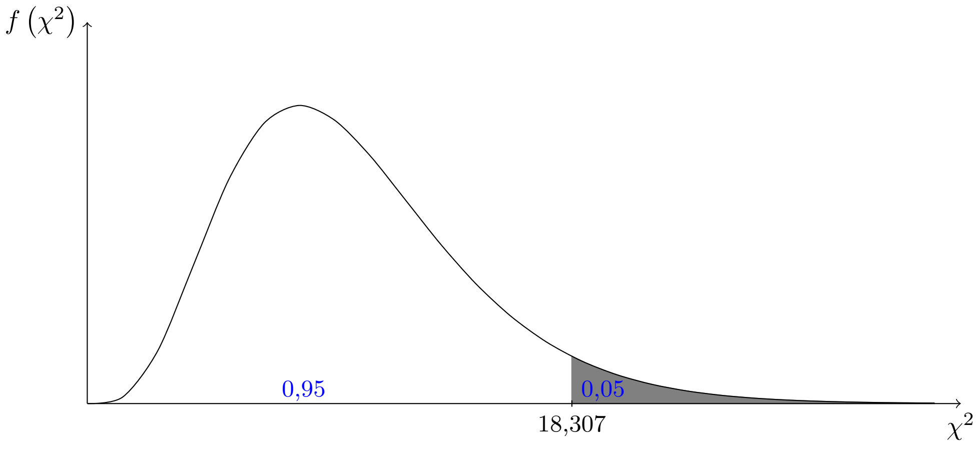
   a) $\chi^2_{0{,}025;\nu=10} = 20{,}483$, de acordo com a consulta que realizamos na tabela miniatura da distribuição qui-quadrado que apresentamos. Devemos utilizar a probabilidade 0,025 (coluna da tabela) e a linha correspondente aos graus de liberdade $\nu = 10$. Veja a figura a seguir.



b) $\chi^2_{0,01;\nu=6} = 16{,}812$, de acordo com a consulta que realizamos na tabela miniatura da distribuição qui-quadrado que apresentamos. Devemos utilizar a probabilidade 0,01 (coluna da tabela) e a linha correspondente aos graus de liberdade $\nu = 6$. Veja a figura a seguir.

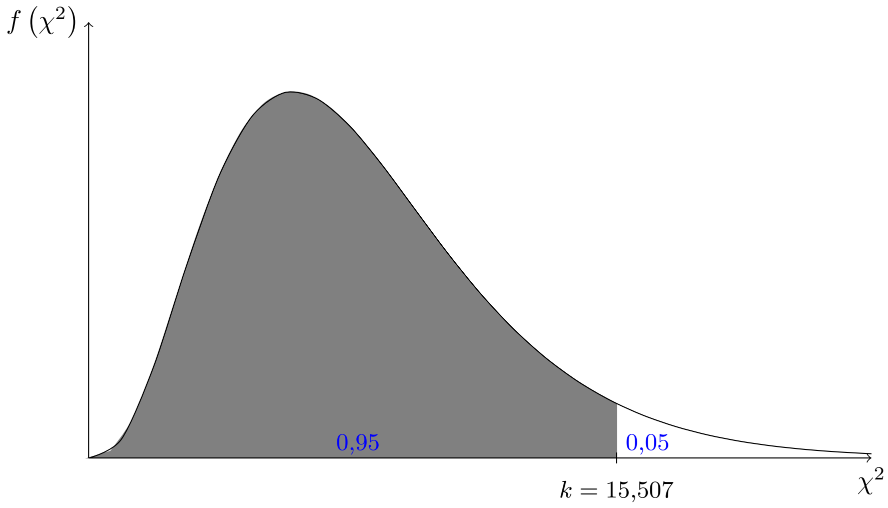


c) $\chi^2_{0,05;\nu=10} = 18{,}307$, de acordo com a consulta que realizamos na tabela miniatura da distribuição qui-quadrado que apresentamos. Devemos utilizar a probabilidade 0,05 (coluna da tabela) e a linha correspondente aos graus de liberdade $\nu = 10$. Veja a figura a seguir.



d) $\chi^2_{\alpha} = \chi^2_{0,05;\nu=8} = 15{,}507$, pois se $P(\chi^2 < \chi^2_{\alpha}) = 0{,}95$, significa que $P(\chi^2 > \chi^2_{\alpha}) = 0{,}05$, sendo $\alpha = 0{,}05$. Não fizemos gráficos ilustrativo deste caso, pois é essencialmente o mesmo do item (3e).

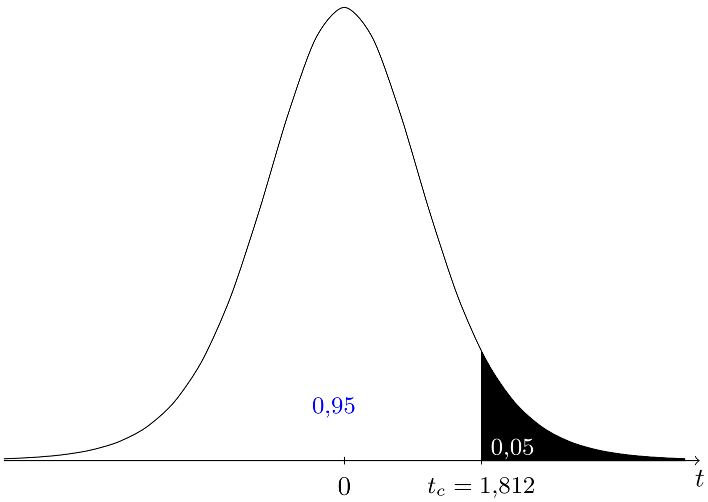
e) Este caso apresentamos apenas uma alteração de notação. Temos que a integral definida anunciada determina uma área sob a curva (distribuição qui-quadrado com $\nu = 8$ graus de liberdade) entre 0 e o valor de k igual a 0,95. Veja esquema ilustrativo, com área em cinza.



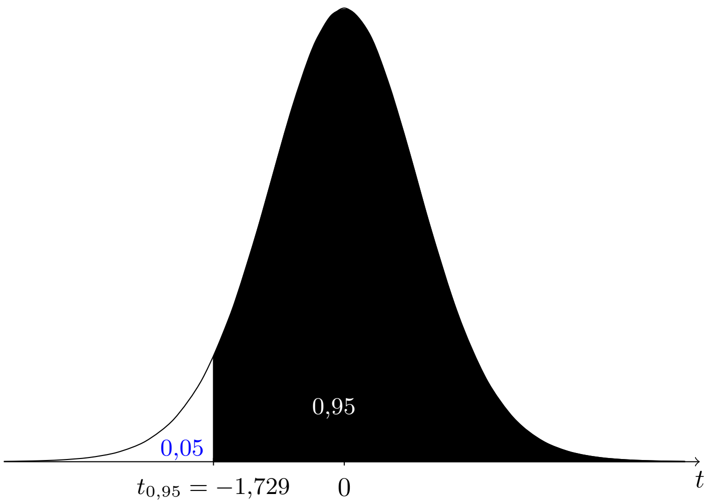
Logo, a área sob a curva delimitada por k e ∞ representa 5%. Assim, $k = \chi^2_{0,05;\nu=8} = 15{,}507$.

4) De acordo com a tabela fornecida e com as afirmativas probabilísticas temos as seguintes respostas aos exercícios propostos, considerando a distribuição t de Student.

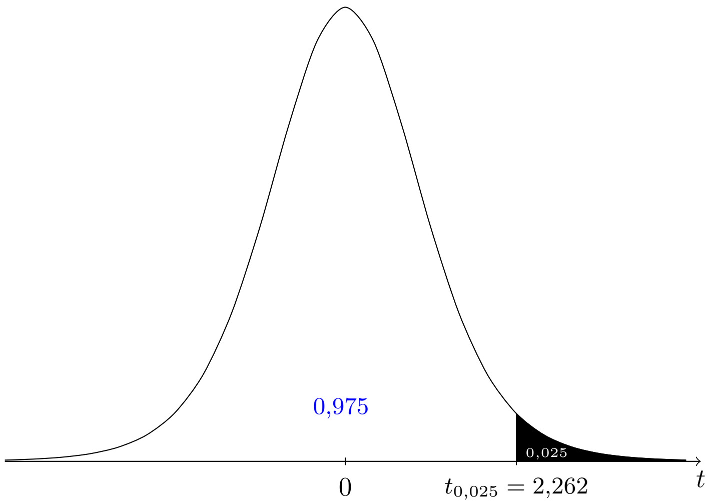
   a) $P(t > t_c) = 0{,}05$ com $\nu = 10$, logo se consultarmos a tabela miniatura da distribuição t de Student temos $t_c = 1{,}812$. Veja esquema a seguir.



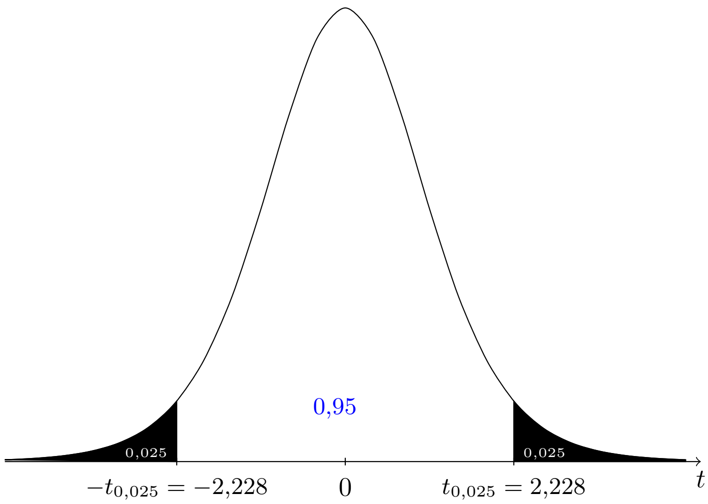
   b) $t_{0,95}$ com $\nu = 20 - 1 = 19$ graus de liberdade é equivalente ao $t_{0,05}$ com $\nu = 19$ graus de liberdade, mas com sinal negativo, pois a distribuição t é simétrica. Assim, $t_{0,95} = -t_{0,05}$. Logo, se consultarmos a tabela miniatura da distribuição t de Student temos $t_{0,95} = -1{,}729$. Veja esquema a seguir.



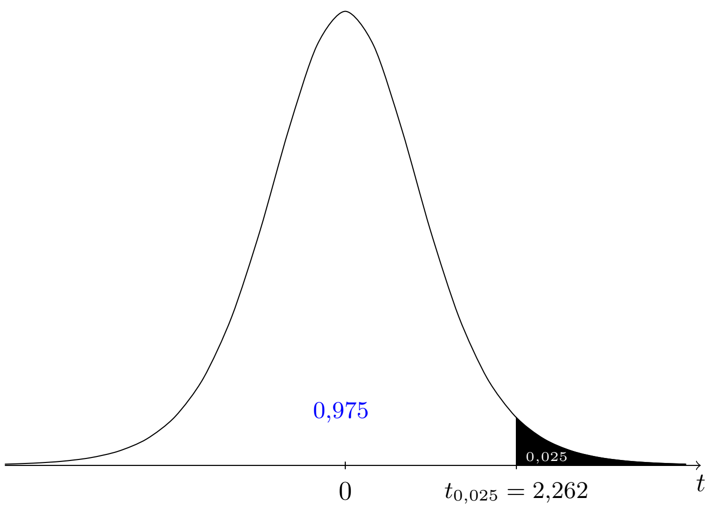
   c) $t_{0,025}$ com $\nu = 10 - 1 = 9$; logo, se consultarmos a tabela miniatura da distribuição t de Student temos $t_{0,025} = 2{,}262$. Veja esquema a seguir.



d) Para determinarmos $t_{\alpha/2}$ dado que $P(-t_{\alpha/2} < t < t_{\alpha/2}) = 0{,}95$, temos que $\alpha = 0{,}05$ e $\alpha/2 = 0{,}025$. Consultando a tabela com $\nu = 10$ graus de liberdade observamos $t_{0,025;\nu=10} = 2{,}228$. Veja esquema ilustrativo a seguir.

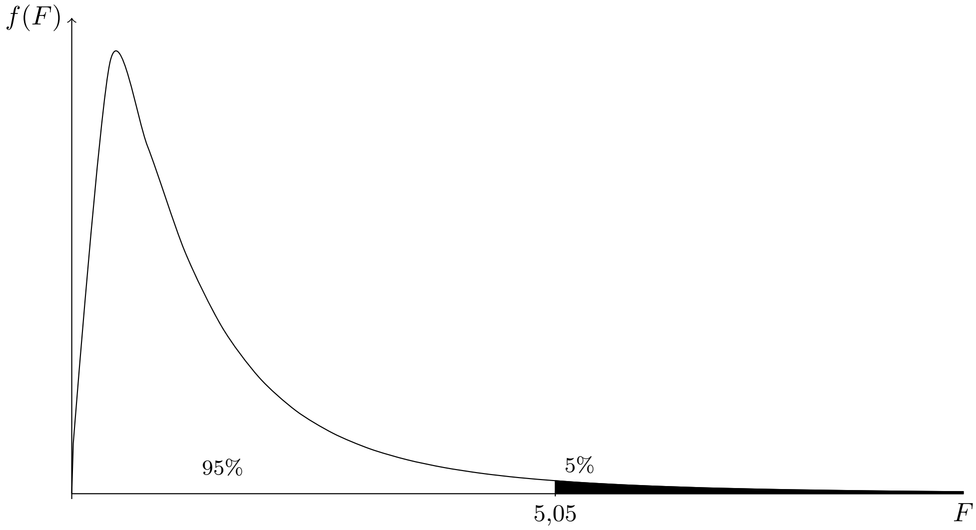


e) Podemos escrever a expressão $\int_{t_c}^{\infty} f(t)dt = 0{,}025$ por $P(t > t_c) = 0{,}025$, logo $t_c = t_{0,025;\nu=9}$. Assim, se consultarmos a tabela miniatura da distribuição t de Student temos $t_c = 2{,}262$. Veja esquema a seguir e perceba de uma maneira geral as diferentes formas (notações) que possuímos para obter quantis superiores da distribuição t de Student.

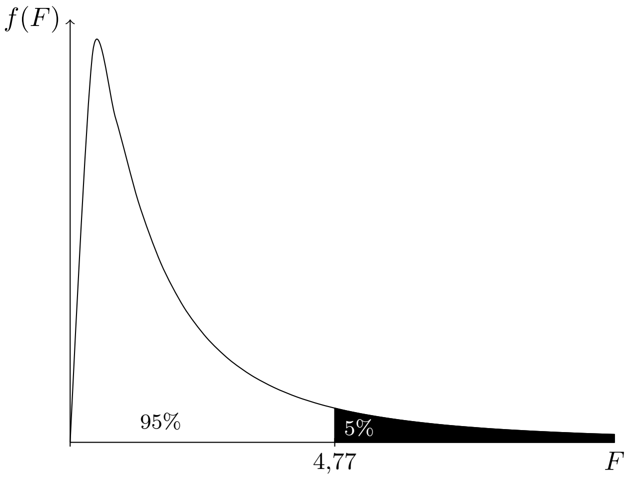


5) De acordo com a tabela fornecida e com as afirmativas probabilísticas temos as seguintes respostas aos exercícios propostos, considerando a distribuição F de Snedecor.

a) $F_{0,05;\nu_1=5;\nu_2=5} = 5{,}05$, valor resultante da consulta à tabela miniatura da distribuição F. Veja figura ilustrativa a seguir.



b) $F_{0,05;\nu_1=9;\nu_2=5} = 4{,}77$, valor resultante da consulta à tabela miniatura da distribuição F. Veja figura ilustrativa a seguir.



c) $F_{0,05;\nu_1=1;\nu_2=10} = 4{,}96$, valor resultante da consulta à tabela miniatura da distribuição F. Se consultarmos a tabela t de Student veremos que $t_{0,025;\nu=10} = 2{,}228$. Se tomarmos o quadrado do quantil t, temos $2{,}228^2 = 4{,}963$, que é igual ao valor tabelado de F. Assim, esta relação é sempre válida, e pode ser colocada de forma geral por $F_{\alpha;\nu_1=1;\nu_2} = t^2_{\alpha/2;\nu=\nu_2}$. Observe que a probabilidade em t é metade ($\alpha/2$) da apresentada em F (α); os graus de liberdade ν_1 são sempre iguais a 1; e os graus de liberdade de t, ν, é igual a ν_2 de F.