Universidade Federal de Lavras
Departamento de Estatística
Prof. Daniel Furtado Ferreira
$11^{\underline{a}}$ Teoria da Decisão Estatística

1) Quais são os erros envolvidos nos testes de hipóteses? Explique.

2) Se ao realizar um teste e a hipótese nula for rejeitada, qual será o possível erro que você poderá estar incorrendo? Qual é a probabilidade de este erro ser cometido?

3) Se em um determinado teste a hipótese nula não for rejeitada, qual é o possível erro que você estará incorrendo? Qual é a probabilidade de se estar cometendo este erro?

4) Em um teste, as probabilidades dos erros tipo I e II são inversamente proporcionais. Se reduzirmos em demasia a probabilidade do erro tipo I (α), a probabilidade do erro tipo II (β) aumentará. Como podemos, fixado o valor de α, reduzir a probabilidade de cometermos o erro tipo II (β)?

5) O fator K em $(\text{MJ mm})^{-1}$ (erodibilidade do solo em relação a quantidade de solo perdido em uma dada área por unidade do índice de erosividade) de $n = 22$ unidades amostrais de solos brasileiros com horizonte B textural (Bt) estão apresentados a seguir:

0,008	0,045	0,024	0,034	0,027	0,032	0,018	0,032	0,012	0,008	0,004
0,025	0,008	0,031	0,009	0,014	0,004	0,033	0,032	0,004	0,023	0,028

Fonte: Marques, J.J.G. de S. e M. (Tese MS, 1996).

Testar a hipótese de que a média brasileira do fator K é igual a de um outro país sul americano dada por 0,074.

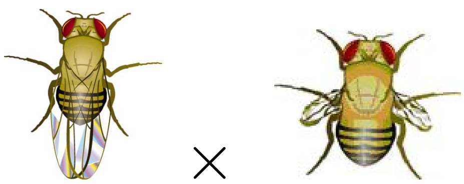
Dados: $t_{0,025;\nu=21} = 2{,}080$.

6) Planejar um experimento para testar a hipótese de que a média geral dos alunos em todas as disciplinas cursadas na UFLA (que estejam estudando) seja igual a 6,0. Dê os detalhes do experimento (amostragem) e o roteiro para o teste, além de fornecer os detalhes de como seria o dimensionamento da amostra para execução do teste.

7) Um melhorista de planta irá realizar o melhoramento em uma população candidata ao programa se sua variância for igual a $\sigma^2 = 15$ (t/ha)^2. Numa amostra de tamanho $n = 250$ foi obtida a seguinte estimativa da variância populacional: $S^2 = 14{,}5$ (t/ha)^2. Com base em um teste de hipótese adequado, o melhorista deve tomar que decisão em relação a escolha desta população? Justifique sua resposta aplicando esse teste apropriado.

Dados: $\chi^2_{0,025;249} = 294{,}601$ e $\chi^2_{0,975;249} = 207{,}186$.

8) Em Drosophila existe a suspeita de que um gene (V) controla os tipos de asa (normal e vestigial). Na geração F_2 do cruzamento entre uma linhagem com asas normais e outra com asas vestigiais



foram observados os seguintes resultados:

Asas Normais	Asas Vestigiais
60	29

Testar a hipótese de que existe apenas um gene, ou seja, de herança monogênica. Isso equivale ao teste da hipótese de que a proporção de indivíduos com asas vestigiais é igual a $\frac{1}{4}$.

Resolução

1) Erros do tipo I e do tipo II. O erro do tipo I é aquele que cometemos quando rejeitamos uma hipótese verdadeira e a probabilidade de o cometermos é igual a α, que é diretamente controlada pelo pesquisador. O erro do tipo II é aquele que cometemos quando não rejeitamos uma hipótese que é falsa e a probabilidade de cometê-lo é β. As probabilidades dos dois erros são inversamente proporcionais. O valor de β depende do teste adotado, do tamanho da amostra e da distância entre o valor hipotético e o valor paramétrico. Quanto menor essa distância, maior será o β. Pense, no entanto, que as consequências práticas de não rejeitar uma hipótese falsa quando o valor paramétrico está muito perto do valor hipotético podem ser consideradas desprezíveis.

2) Se rejeitarmos a hipótese e ela for falsa a decisão estará correta, mas se a rejeitarmos e ela for verdadeira, então estaremos incorrendo em um erro do tipo I, cuja probabilidade de o estarmos cometendo é igual a α. Observe que as decisões acertadas em um teste de hipótese, em geral, são mais prováveis. Assim, devemos estar cientes que poderemos estar incorrendo em erro, mas que a maior chance é de termos acertado a decisão.

3) Não rejeitar uma hipótese verdadeira é uma decisão correta, mas se a hipótese for falsa, o erro cometido é do tipo II e a probabilidade de cometê-lo é β. Veja característica deste erro no exercício 1.

4) Aumentando o tamanho da amostra n.

5) A hipótese de interesse é dada por:

$$H_0: \mu = 0{,}074 \qquad \text{vs} \qquad H_1: \mu \neq 0{,}074.$$

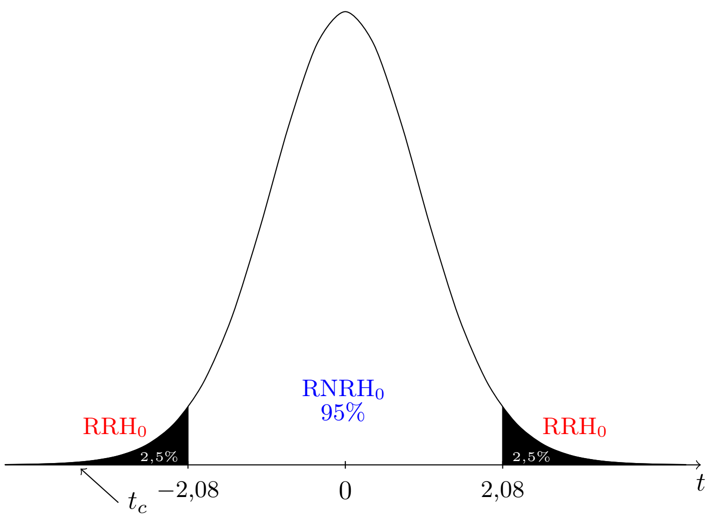
A média e a variância amostrais são:

$$\bar{X} = 0{,}02068182 \qquad \text{e} \qquad S^2 = 0{,}0001486082.$$

A estatística do teste:

$$t_c = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\dfrac{S}{\sqrt{n}}} = \frac{0{,}02068182 - 0{,}074}{\sqrt{\dfrac{0{,}0001486082}{22}}} = -20{,}5147.$$

A região crítica (região de rejeição da hipótese nula), sabendo que $t_{0,025;\nu=21} = 2{,}080$, é dada por:



Como o valor de t_c pertence a região de rejeição da hipótese, pelo teste t, com 95% de confiança, a hipótese nula deve ser rejeitada, ou seja, concluímos que os solos brasileiros possuem média de erodibilidade inferior a média do país sul americano considerado.

6) Devemos inicialmente realizar uma amostra e para isso precisamos dimensioná-la. Assim, devemos fazer uma amostra piloto e obter uma estimativa S^2 da variância populacional, fixamos uma diferença mínima (e) que desejamos

detectar pelo teste de hipótese e fixamos o coeficiente de confiança em $1-\alpha$, escolhendo um valor apropriado de α. Com estes valores utilizamos a fórmula

$$n = \frac{t_{\alpha/2}^2 S^2}{e^2},$$

de forma iterativa e dimensionamos a amostra.

Devemos realizar a amostragem de forma representativa e podemos imaginar que as notas são diferentes nos diferentes cursos (se não for não há problema) e diferente nos diferentes períodos, pois na área básica a dificuldade é potencialmente maior. Assim, realizamos uma amostragem estratificada proporcional.

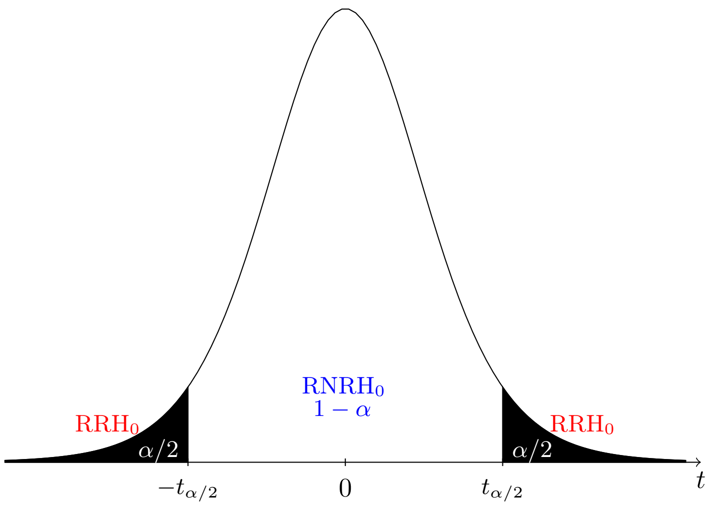
Após obtermos a amostra estimamos a média e a variância populacionais obtendo $\bar{X}$ e S^2. A hipótese nula de interesse é:

$$H_0: \mu = 6{,}0 \qquad \text{vs} \qquad H_1: \mu \neq 6{,}0.$$

A estatística do teste é calculada utilizando:

$$t_c = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\dfrac{S}{\sqrt{n}}}.$$

O valor da estatística do teste é confrontado com as regiões críticas (regiões de rejeição da hipótese nula), adotando $t_{\alpha/2;\nu=n-1}$, dada por:



Se $t_c \in RRH_0$, então rejeitamos H_0; caso contrário H_0, não deve ser rejeitada considerando o nível nominal de significância α adotado.

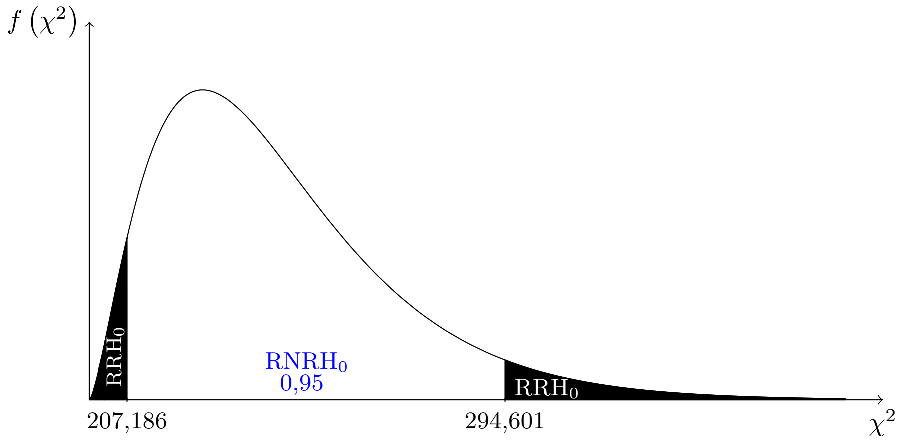
7) Devemos testar as hipóteses:

$$H_0: \sigma^2 = 15 \qquad \text{vs} \qquad H_1: \sigma^2 \neq 15.$$

A estatística do teste é calculada utilizando:

$$\chi_c^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} = \frac{249 \times 14{,}5}{15} = 240{,}70.$$

A região crítica (de rejeição da hipótese) para o teste é dada por:



como $\chi^2_c = 240{,}70$ se situa na região de não rejeição da hipótese nula, não devemos rejeitar a hipótese H_0, considerando o teste de qui-quadrado com 95% de confiança. Assim, a hipótese de que a variância populacional seja igual a 15 não deve ser rejeitada e portanto o melhorista poderá investir na população candidata.

8) Sob herança monogênica a segregação genotípica esperada na geração F_2 é dada por:

$$\frac{1}{4}VV \qquad\qquad \frac{2}{4}Vv \qquad\qquad \frac{1}{4}vv,$$

que corresponde a 3/4 de Drosophilas com asas normais e 1/4 com asas vestigiais (segregação fenotípica).

Assim, se esse modelo (de herança monogênica) for verdadeiro, espera-se 1/4 de insetos com asas vestigiais. Logo, devemos testar a seguinte hipótese

$$H_0 : p = \frac{1}{4} \qquad \text{vs} \qquad H_1 : p \neq \frac{1}{4}.$$

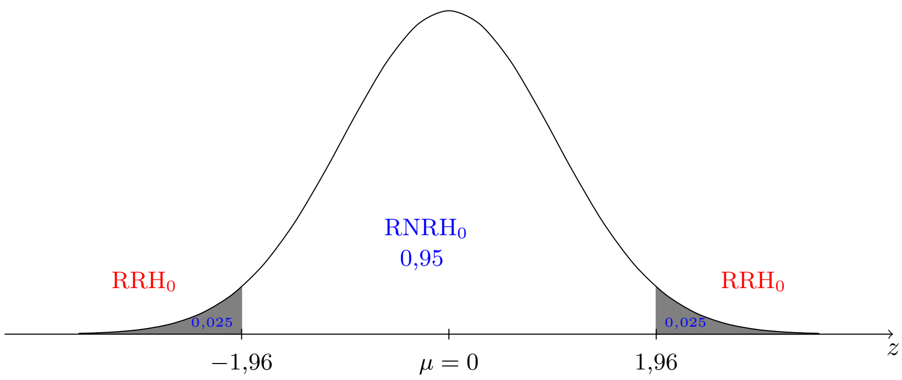
A estimativa pontual da proporção de sucessos (insetos com asas vestigiais) é:

$$\hat{p} = \frac{y}{n} = \frac{29}{89} = 0{,}3258427,$$

sendo, então a estatística do teste dada por:

$$Z_c = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\dfrac{p_0(1-p_0)}{n}}} = \frac{0{,}3258427 - 0{,}25}{\sqrt{\dfrac{0{,}25 \times (1 - 0{,}25)}{89}}} = 1{,}652373.$$

A região crítica (de rejeição da hipótese), em cinza, para o teste é dada por:



Como o valor da estatística calculado $Z_c = 1{,}65$ pertence a região de não rejeição da hipótese, então pelo teste binomial, utilizando a aproximação normal, com aproximadamente 95% de confiança, não rejeitamos a hipótese nula de que a herança é monogênica, ou seja, o controle do tipo de asas em Drosophilas é devido a um único gene com dominância do alelo V, que confere asas normais, sobre o alelo v, responsável por asas vestigiais.

Observação: Matéria para a última prova

```
Listas: 11, 12 e 13 (sem gabarito)
Prova 3: Capítulo 8, seção 8.4
         Capítulo 9, Seções 9.1 (9.1.5), 9.2 (9.2.2), 9.4(9.4.3)
         Capítulo 11, Seções 11.1 (11.1.3)
         Capítulo 13 e 14 tópicos selecionados.
```