

Universidade Federal de Lavras
Departamento de Estatística
Prof. Daniel Furtado Ferreira

15^a Lista de Exercícios Práticos Distribuição de Probabilidades Discretas

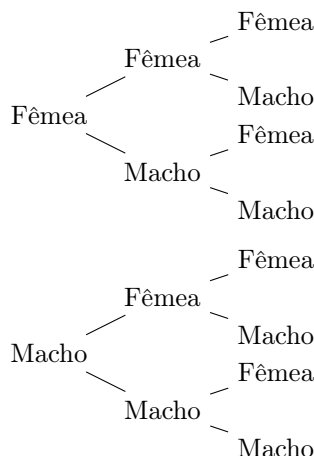
- 1) Considere ninhadas de $n = 3$ filhotes de coelhos. Construir o espaço amostral considerando os nascimentos de fêmeas e machos, utilizando um diagrama de árvore e considerar os eventos “*nascer macho*” e “*nascer fêmea*” como equiprováveis.
 - a) Sendo X a ocorrência de fêmeas, construa a distribuição de probabilidade de X ;
 - b) Calcule as probabilidades dos seguintes eventos por meio da distribuição de probabilidade construída:
 - i) nascimento de exatamente duas fêmeas.
 - ii) nascimento de pelo menos um macho.
 - iii) nascimento de pelo menos duas fêmeas.
 - iv) nascimento de no máximo uma fêmea.
 - c) Calcule as probabilidades do item (a) pela distribuição binomial.
 - d) Suponha que você faça uma amostragem de 500 ninhadas de 3 filhotes. Em quantos, em média, você espera encontrar com exatamente 1 fêmea?
- 2) Considere nascimentos de $n = 4$ filhotes de coelhos de uma determinada raça. Nesta raça há um distúrbio genético e a probabilidade de nascer fêmea é $5/8$. Sendo X a ocorrência de fêmeas e utilizando a distribuição binomial obter:
 - a) a distribuição de probabilidade de X , ou seja, os valores e as probabilidades associadas aos respectivos valores x ;
 - b) a média e variância da variável aleatória X , com distribuição binomial;
 - c) o número esperado (médio) de ninhadas em uma amostra de 1.000 ninhadas de tamanho $n = 4$ para cada valor da variável aleatória X .
- 3) Numa lâmina verificou-se que existiam em média 4 bactérias/cm². A lâmina foi subdividida em 600 quadrados de 1 cm². Qual é o modelo probabilístico adequado para modelar a ocorrência de bactérias por cm², supondo que a distribuição espacial segue um padrão aleatório? Em quantos dos 600 quadrados, em média, você espera encontrar no máximo 1 bactéria? Qual é a probabilidade de se encontrar mais de 2 bactérias por centímetro quadrado? Qual é a probabilidade de não encontrar bactérias em um quadrado tomado aleatoriamente destes 600 quadrados?
- 4) Um pesquisador da área de zootecnia conseguiu uma série de dados dos últimos 120 anos com o registro do número de uma doença rara em equinos da localidade em que trabalhava. Os dados obtidos foram:

Número de doenças (x)	0	1	2	3	4	5
Número de anos (F_i)	55	40	17	5	2	1

- a) Estime o número médio de doenças /ano;
 - b) Calcule para cada valor da variável aleatória X , as probabilidades associadas. Suponha que X possua distribuição de Poisson e que a média amostral é o estimador do parâmetro λ da distribuição Poisson;
 - c) Calcule a frequência esperada (em anos) para cada valor da variável aleatória X ;
 - d) Compare os resultados esperados com os observados. Com base nesta comparação, você pode afirmar que a distribuição de Poisson é adequada para explicar a ocorrência desta doença na região de estudo? Justifique.
- 5) Uma plantação de tomate possui em média 2 galhas de *M. incógnita* por planta. Qual é a probabilidade de que uma planta amostrada desta população não possua galha? Suponha que o modelo Poisson é apropriado para modelar a ocorrência de galhas de nematóide. Qual é a probabilidade de que em uma amostra de tamanho $n = 5$ plantas, as 5 não apresentem galhas?

Resolução

1) O dendrograma (diagrama de árvore) é:



O espaço amostral é obtido considerando todos os ramos desse diagrama de árvore e resulta em:

$$\Omega = \{(FFF), (FFM), (FMF), (FMM), (MFF), (MFM), (MMF), (MMM)\}.$$

Cada ponto deste é equiprovável, pois as probabilidades de nascimento de fêmea e macho são iguais e cada elemento de Ω tem probabilidade $(1/2)^3 = 1/8$.

a) A distribuição de probabilidade da variável aleatória X , definida como sendo o número de fêmeas, é:

x	0	1	2	3
$P(X = x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

Por exemplo, a probabilidade $P(X = 1)$ é obtida pelo número total de pontos de Ω em que $X = 1$, que no caso é igual a 3, em relação ao número total de pontos, que é igual a 8.

b) Os resultados para os eventos solicitados são:

i) $P(X = 2) = \frac{3}{8} = 0,3750 = 37,50\%$;

ii) Se Y representa o número de machos, o evento $Y \geq 1$ equivale a $X \leq 2$, pois se houver 1 macho na ninhada, isto implica em duas fêmeas; se houver 2 machos, implica em 1 fêmea; e se houver 3 machos, implica em 0 fêmea. Assim, a probabilidade do evento é:

$$P(Y \geq 1) = P(X \leq 2) = P(X = 2) + P(X = 1) + P(X = 0) = \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8} = 0,8750 = 87,50\%;$$

iii) $P(X \geq 2) = P(X = 2) + P(X = 3) = \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2} = 0,50 = 50\%$;

iv) $P(X \leq 1) = P(X = 1) + P(X = 0) = \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2} = 0,50 = 50\%$.

c) Para obtermos a distribuição de probabilidade de X , podemos utilizar o modelo binomial dado por:

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

para $x = 0, 1, \dots, 4$, com $p = 1/2$ e $n = 3$.

Por exemplo, para a probabilidade $P(X = 0)$ temos:

$$P(X = x) = \binom{3}{0} \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{3-0} = 1 \times 1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}.$$

Assim, se repetirmos o processo para $x = 1, 2$ e 3 , temos a distribuição de probabilidades apresentada anteriormente, no item (a).

- d) O número esperado NE de ninhadas de 3 filhotes com exatamente 1 fêmea é dado pelo produto da probabilidade do evento $P(X = 1)$ pelo número total de ninhadas, ou seja, é $NE = (3/8) \times 500 \approx 188$ ninhadas. Assim, das 500 esperamos que 188 tenham exatamente 1 fêmea.
- 2) Neste caso assumimos que X , definida como o número de fêmeas, possui distribuição binomial com parâmetros $n = 4$ e $p = 5/8$. A probabilidade de sucesso não é $1/2$, de acordo com as leis de Mendel, pois há um distúrbio genético na raça. Usualmente usamos a seguinte notação para dizer a mesma coisa que acabamos de explicar: $X \sim \text{Binomial}(n = 4, p = 5/8)$.

a) Para obtermos a distribuição de probabilidade de X , podemos utilizar o modelo binomial dado por:

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1 - p)^{n-x}$$

para $x = 0, 1, \dots, 4$.

Por exemplo, para a probabilidade $P(X = 0)$ temos:

$$P(X = x) = \binom{4}{0} \left(\frac{5}{8}\right)^0 \left(1 - \frac{5}{8}\right)^{4-0} = 1 \times 1 \times \left(\frac{3}{8}\right)^4 = 0,0198.$$

Assim, temos a seguinte distribuição de probabilidades:

x	0	1	2	3	4
$P(X = x)$	0,0198	0,1318	0,3296	0,3662	0,1526

- b) A média é: $\mu_X = np = 4 \times 5/8 = 2,5$; e a variância é: $\sigma_X^2 = np(1 - p) = 4 \times (5/8) \times (3/8) = 0,9375$.
- c) O número esperado NE de ninhadas é dado pelo produto da probabilidade do evento de interesse $P(X = x)$ pelo número total de ninhadas. Por exemplo, para $X = 0$, temos $P(X = 0) \times 1.000 = 0,0198 \times 1.000 = 19,8 \approx 20$ ninhadas com nenhuma fêmea. Os demais valores (arredondados) estão apresentados na tabela a seguir:

x	0	1	2	3	4
$P(X = x)$	0,0198	0,1318	0,3296	0,3662	0,1526
NE	20	132	330	366	153

3) Resposta para cada uma das questões:

- a) O modelo probabilístico adequado é o modelo Poisson, principalmente se pudermos supor que a distribuição das bactérias pela lâmina seja aleatória. Assim, $X \sim \text{Poisson}(\lambda = 4)$.
- b) $NE = P(X \leq 1) \times 600$. Para obtermos a probabilidade do evento de interesse devemos usar o modelo Poisson dado por:

$$P(X = x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!},$$

para $x = 0, 1, 2, \dots$ e $\lambda = 4$.

Assim, $P(X \leq 1) = P(X = 1) + P(X = 0)$, sendo

$$P(X = 0) = \frac{e^{-4} \times 4^0}{0!} = 0,0183 \quad \text{e} \quad P(X = 1) = \frac{e^{-4} \times 4^1}{1!} = 0,0733.$$

Portanto,

$$P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0,0183 + 0,0733 = 0,0916 = 9,16\%$$

e o número esperado de quadrados com no máximo 1 bactéria é $NE = P(X \leq 1) \times 600 = 0,0916 \times 600 \approx 55$.

- c) $P(X > 2) = P(X = 3) + P(X = 4) + \dots$. Como esta soma possui um número infinito de termos e sabendo que a soma de todas as probabilidades é igual a 1, então

$$\begin{aligned} P(X > 2) &= 1 - [P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)] = 1 - \left(0,0183 + 0,0733 + \frac{e^{-4} \times 4^2}{2!}\right) \\ &= 1 - (0,0183 + 0,0733 + 0,1465) = 1 - 0,2381 = 0,7619 = 76,19\%. \end{aligned}$$

d) $P(X = 0) = 1,83\%$.

4) A ocorrência de doenças por ano pode ser modelada, se for aleatória, pelo modelo Poisson. Assim, $X \sim \text{Poisson}(\hat{\lambda} = \bar{X})$.

a) A média é

$$\bar{X} = \frac{0 \times 55 + 1 \times 44 + \dots + 5 \times 1}{120} = \frac{102}{120} = 0,85 \text{ doenças/ano.}$$

b) O parâmetro λ pode ser estimado por $\hat{\lambda} = \bar{X} = 0,85$. Assim, podemos estimar a distribuição de probabilidade utilizando o modelo Poisson por:

$$P(X = x) = \frac{e^{-0,85} \times 0,85^x}{x!}.$$

Para $X = 0$ e $X = 1$, para fins de ilustração, temos:

$$P(X = 0) = \frac{e^{-0,85} \times 0,85^0}{0!} = 0,4274 \qquad P(X = 1) = \frac{e^{-0,85} \times 0,85^1}{1!} = 0,3633.$$

Estas e as demais probabilidades são apresentadas na tabela seguinte:

x	0	1	2	3	4	5	6 ou mais
$P(X = x)$	0,4274	0,3633	0,1544	0,0437	0,0093	0,0016	0,0003

c) A frequência esperada é dada pelo produtos das probabilidades por 120. Logo,

x	0	1	2	3	4	5	6 ou mais
$P(X = x)$	0,4274	0,3633	0,1544	0,0437	0,0093	0,0016	0,0003
FE	51,29	43,60	18,53	5,24	1,12	0,19	0,04

d) Como as frequências observadas e esperadas estão relativamente próximas, podemos considerar que o modelo Poisson é adequado para modelar a ocorrência da doença na região estudada.

5) Na primeira parte do exercício, devemos considerar uma variável $X \sim \text{Poisson}(\lambda = 2)$ referente a distribuição do número de galhas de nematóides por planta. A probabilidade desejada é $P(X = 0)$, cuja resposta é:

$$P(X = 0) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} = \frac{e^{-2} \times 2^0}{0!} = 0,1353 = 13,53\%.$$

Assim, a probabilidade de uma planta sorteada ao acaso não possuir galhas é de 13,53%.

A segunda parte da questão refere-se a probabilidade de que em uma amostra de tamanho $n = 5$ desta população, todas as 5 não apresentem galhas. Se definirmos a variável aleatória (V.A.) Y como sendo o número de plantas sem galhas de nematóides, veremos que esta variável possui distribuição binomial com probabilidade de sucesso, a planta não apresentar galhas, dada por $p = P(X = 0)$. A probabilidade de sucesso é dada pela probabilidade obtida na primeira parte do exercício. Assim, $Y \sim \text{binomial}(n = 5, p = 0,1353)$ e a probabilidade desejada é calculada por:

$$P(Y = 5) = \binom{n}{y} p^y (1-p)^{n-y} = \binom{5}{5} \times 0,1353^5 \times (1 - 0,1353)^{5-5} = 0,1353^5 = 0,000045 = 0,0045\%.$$

Logo, a probabilidade de amostrarmos 5 plantas e todas elas não apresentarem galhas é de apenas 0,0045%.